# Einstein Metriken
# auf
# Exotischen Sphären

**KRZYSZTOF GALICKI**

Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn

und

University of New Mexico, Albuquerque

**Hamburg, Dezember 2004**

# INHALT



• **Meine Mitarbeiter**: Der Artikel *Einstein metrics on spheres* ist eine gemeinsame Arbeit mit **Charles Boyer (Albuquerque)** und **János Kollár (Princeton)** und wird in den *Annals of Mathematics* veröffentlicht.

• Diese Folien können bei **www.galicki.com** eingesehen werden.

## • Riemannsche Mannigfaltigkeiten und Krümmung

**Definition**: *Sei* $M^n$ *eine differenzierbare Mannigfaltigkeit. Eine* **Riemannsche Metrik** *auf* $M^n$ *ist ein Tensorfeld* $g$ *vom Typ* $(2{,}0)$*, das beides, symmetrisch und an jeder Stelle* $p \in M^n$ *positiv definit ist.*

**Hauptsatz der Riemannschen Geometrie**: *Sei* $(M^n, g)$ *eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gibt genau einen linearen Zusammenhang* $\nabla$ *für* $M^n$ *mit*

- $(\nabla_Z g)(X, Y) =$
  $Z \cdot g(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = 0,$
- $T_\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] = 0,$

*für alle* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$*. Dieser* $\nabla$ *heißt der* **Zusammenhang von Levi-Civita**.

Für jeden linearen Zusammenhang definiert man seine Krümmung. Im Falle, dass $\nabla$ ein Levi-Civita Zusammenhang ist, erhalten wir die Riemannsche Krümmung.

**Definition**: *Der Tensor vom Typ (3,1)*

$$R(X,Y)Z := (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_X \nabla_Y - \nabla_{[X,Y]})Z$$

*heißt* **der Riemannsche Krümmungstensor**.

Aus dem Krümmungstensor gewinnt man durch Kontraktion (Spurbildung) einfachere Krümmungsinvarianten.

**Definition**: *Der symmetrische Tensor vom Typ (2,0)*

$$Ric(X,Y) = Tr\ (Z \mapsto R(X,Z)Y)$$

*heißt* **die Ricci-Krümmung** *und die Funktion*

$$S_g = Tr\ Ric$$

*heißt* **die Skalarkrümmung** *der Riemannschen Metrik* $g$ *auf* $M^n$.

**Definition**: *Sei* $p \in M^n$ *und* $\sigma \subset T_pM$ *eine 2-Ebene. Sei* $X, Y \in T_pM$ *eine Basis der Ebene* $\sigma$. *Dann nennt man*

$$K(p,\sigma) = \frac{R(X,Y,Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y) - g^2(X,Y)}$$

**die Schnittkrümmung** *der Mannigfaltigkeit* $M^n$ *im Punkt* $p$ *und in Richtung der 2-Ebene* $\sigma$.

**Definition**: $(M^n, g)$ *heißt ein Raum konstanter Schnittkrümmung (oder* **Raumform***), falls*

$$K(p, \sigma) = \lambda(p)$$

*unabhängig von* $\sigma$ *ist.*

**Satz**: *Die Schnittkrümmung jeder Raumform* $(M^n, g)$, $n \geq 3$, *ist konstant* $\lambda(p) = \lambda$ *und*

$$R(X, Y)Z = \lambda[g(Y, Z)X - g(X, Z)Y].$$

**Definition**: $(M^n, g)$ *heißt* **Einstein-Raum** *falls*

$$\boxed{\mathrm{Ric}(X, Y) = \lambda g(X, Y)}$$

A priori kann $\lambda = S_g/n$ eine Funktion auf $M^n$ sein, aber als Resultat aus der zweiten Bianchi-Identität, folgt

**Satz**: *Ist* $(M^n, g)$ *ein zusammenhängender Einstein-Raum der Dimension* $n \geq 3$, *so ist die Skalarkrümmung konstant.*

**Satz**: *Jeder 3-dimensionale Einstein-Raum ist eine Raumform.*

**Die Fundamentale Frage [R. Thom, 1958]**: Sei $M^n$ eine glatte Mannigfaltigkeit. Gibt es eine Riemannsche Metrik $g$ auf $M^n$, die am besten die globalen (topologischen, geometrischen) Eigenschaften von $M^n$ beschreibt? Gibt es eine “ausgezeichnete” Klasse von Riemannschen Metriken?

**Beispiel 1. Der Ricci-Fluß** und **die Poincaré-Vermutung**.

Der **Ricci-Fluß**

$$\frac{d}{dt}g(t) = -2\mathrm{Ric}_{g(t)}.$$

ist eine nichtlineare Evolutionsgleichung für die Riemannsche Metrik. In den 80er Jahren ist dieser Fluß von **R. Hamilton** systematisch untersucht worden.

**Satz von Hamilton**: *Jeder 3-dimensionale Raum positiver Ricci-Krümmung entwickelt sich zum Raum konstanter Schnittkrümmung (Raumform). Insbesondere ist jede glatte geschlossene, einfach zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit positiver Ricci-Krümmung homöomorph zur 3-Sphäre.*

**Poincaré-Vermutung [H. Poincaré, 1904]**: Jede geschlossene, einfach zusammenhängende 3-dimensionale Mannigfaltigkeit ist homöomorph zur 3-Sphäre.

**Verallgemeinerte Poincaré-Vermutung** : Jede geschlossene n-Mannigfaltigkeit mit dem Homotopietyp (homotopieäquivalent) einer n-Sphäre ist zur n-Sphäre homöomorph.

**Erinnerung**:

- **Smale [1961]**: $n > 6$, (Fields Medal)
- **Zeeman [1961]**: $n = 5$,
- **Stalling [1962]**: $n = 6$,
- **Smale [1963]**: $n \geq 5$,
- **Freedman [1982]**: $n = 4$, (Fields Medal)
- **Perelman [2005]**: $n = 3$?

**Bemerkung**: So oder so gibt es einen tiefgründigen Zusammenhang zwischen der Topologie und der Krümmung. Die Poincaré-Vermutung ist ein rein topologisches Problem. Jedoch gehören die Ricci-Fluß-Methoden zur klassischen Riemannschen Geometrie.

**Beispiel 2.** **[Calabi-Vermutung]**

**Definition**: Sei $(M^{2n}, g, J, \omega_g)$ eine glatte Mannigfaltigkeit mit der Metrik $g$, der fast-komplexen Struktur $J$, und der symplektischen 2-Form $\omega_g$ so dass

$$g(JX, JY) = g(X, Y), \quad \omega_g(X, Y) = g(X, JY)$$

gilt. Falls $J$ parallel ist (d.h. $\nabla J = 0$), nennt man $(M^{2n}, g, J, \omega_g)$ **Kählersche Mannigfaltigkeit**.

Im Jahr 1933 sind die Eigenschaften von solchen Metriken von **Kähler** untersucht worden. Er zeigt insbesondere, dass der Ricci-Krümmungstensor folgende einfache Gestalt hat:

$$R_{i\bar{j}} = -\frac{\partial}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}\ln(\det(g_{i\bar{j}})).$$

Erst viel später haben **Chern [1948]** und dann **Calabi [1954]** die Wichtigkeit dieser bemerkenswerten Formel verstanden. Man führt eine 2-Form

$$\rho_\omega = -\frac{i}{2\pi}R_{i\bar{j}}dz^i \wedge d\bar{z}^j,$$

ein und nennt sie **Ricci-Form**.

Dann realisiert man, dass die Kohomologieklasse $[\rho_\omega]$ **unabhängig von der Kähler-Metrik ist**. Man kann tatsächlich zeigen, dass $[\rho_\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ die erste Chernklasse von $M$ ist,

$$[\rho_\omega] = c_1(\mathcal{Z}) := -c_1(K_M).$$

Danach hat Calabi gefragt:

**Frage** [Calabi]: **Gilt auch die Umkehrung?**

**Calabi-Vermutung**: *Sei $(M^{2n}, g, J, \omega_g)$ eine Kählersche Mannigfaltigkeit und sei $\Phi$ jede reelle $(1{,}1)$-Form und gelte $[\Phi] = c_1(M)$. Dann trägt $M^{2n}$ eine Kählersche Metrik $h$ mit $[\omega_h] = [\omega_g]$ so dass*

$$\rho_h = \Phi.$$

**Der Satz von Yau**: Die Vermutung gilt. Insbesondere, jede Kählersche Mannigfaltigkeit mit $c_1(M) = 0$ (d.h. trivialem kanonischen Bündel) trägt eine Kählersche Metrik, die Ricci-flach ist (**Calabi-Yau-Raum**).

**Bemerkung**: Beide Beispiele haben sehr viel mit der Einstein-Gleichung zu tun. Also, ist die Antwort auf **die Frage von Thom** vielleicht: **Einstein-Metriken.**

## • Die Einstein-Gleichung

**Erinnerung**: **Die Einstein-Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie** (ART) verbinden die geometrischen Krümmungsgrößen einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit $(M^4, g)$ mit ihren, im Energie-Impuls-Tensor $T$ enthaltenen, physikalischen Eigenschaften:

$$\boxed{E := \mathrm{Ric} - \tfrac{1}{2} S_g \cdot g = \kappa T - \Lambda \cdot g}$$

wobei $\Lambda$ die **kosmologische Konstante** ist.

- Die kosmologische Konstante wurde erstmals von **Einstein 1917** in seine Gravitationsgleichungen eingeführt. Nur so war es ihm möglich, ein statisches homogenes Weltmodell zu konstruieren.
- **Das Hubble-Gesetz [1929]**: unser Universum ist nicht statisch. Einstein antwortete: $\Lambda$ "*war der größte Irrtum meines Lebens*".
- Die Dunkle Materie: Aber, vielleicht auch nicht. Heute glauben Astrophysiker und Kosmologen, dass die kosmologische Konstante $\Lambda \neq 0$.

In der ART ist $(M^4, g)$ eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit, nämlich eine Lorentzmannigfaltigkeit.

## Die Vakuum-Einstein-Gleichung

$$\mathrm{Ric} = 3\Lambda \cdot g$$

ist in beiden Fällen und in allen Dimensionen sehr wichtig. Die Riemannschen Einstein-Räume findet man auch in der Physik von den Supersaiten, in Supergravitationstheorien und in der sogenannten M-theorie.

**Frage 1: Gibt es eine Beziehung zwischen der Riemannschen Gometrie und der Topologie des Einstein-Raumes?**

**Frage 2: Gibt es viele Einstein-Räume? Also, wieviele Einstein Metriken gibt es auf einer glatten Mannigfaltigkeit $M$?**

Die Antwort auf Frage 1 ist generell **ja** in den Dimensionen 3 und 4, aber wahrscheinlich **nein** in den Dimensionen größer als 4. Genauer: man weiß sehr wenig über dieses Problem.

Alle 3-dimensionalen Einstein-Mannigfaltigkeiten sind Raumformen. D.h. die meisten 3-Mannigfaltigkeiten tragen keine Einstein-Metrik.

## Die Hindernisse in der Dimension 4

- Hitchin-Thorpe-Ungleichung (**Thorpe [1969], Hitchin [1974]**):

$$(2\chi \pm 3\tau)(M) \geq 0.$$

Z.B., $(2\chi + 3\tau)(k\mathbb{CP}^2 \# l\overline{\mathbb{CP}^2}) = 4 + 5k - l.$

- Das simpliziale Volumen von **Gromov [1981]**:

$$\chi(M) < \frac{1}{2592\pi^2}\|M\|$$

ist ein homotopie invariantes Hindernis für große nicht-Abelsche Fundamentalgruppen $\pi_1$.

- Neue homotopie-invariante und nicht-homotopie invariante Hindernisse (mit Hilfe der Seiberg-Witten Eichtheorie) **[Kotschick, LeBrun]**.

**Frage**: Sei $M$ eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension größer als 4. Trägt $M$ eine Einstein Metrik?

Im Falle $\lambda > 0$:

- $|\pi_1(M)| < \infty$,
- $\hat{A}(M) = 0$ **[Lichnerowicz, 1963]**,
- $\alpha(M) = 0$ **[Hitchin, 1974]**.

Die zweite Frage ist möglicherweise nicht sehr exakt. Generell, gibt es viele Beispiele von vollständigen Einstein Metriken auf **offenen** Mannigfaltigkeiten. Der Moduliraum der vollständigen Einstein Metriken auf $\mathbb{R}^4$ ist unendlich-dimensional. Wenn $M$ **kompakt** ist, ist die Situation ziemlich unterschiedlich. Die einzigen bekannten Beispiele von kompakten Ricci-flach Manningfaltigkeiten sind

- die Calabi-Yau-Mannigfaltigkeiten $M^{2n}$ mit der Holonomiegruppe $SU(n)$ [**Yau, 1978**],
- die Joyce-Mannigfaltigkeiten $M^7, M^8$ mit den Holonomiegruppen $G_2$ und $Spin(7)$ [**Joyce, 1996**].

**Bemerkung:** Es gibt keine Beispiele der kompakten Ricci-flach (nicht-flach) Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $5, 9, 11, 13, ....$ Für jedes neue Beispiel offeriert Arthur Besse **ein Abendessen in einem französischen Sterne-Restaurant** [**Besse, 1987**]. Generell, sind neue Einstein Metriken auf kompakten Mannigfaltigkeiten **sehr schwer** zu finden.

**Erinnerung**: **Die Einstein Metriken auf Sphären**

• Jede Standardsphäre $S^n$, $n > 1$, trägt die Metrik der konstanten Schnittkrümmung.

• Die Sphäre $S^{4m+3}$, $m > 1$ trägt die zweite $Sp(m+1)$-homogene Einstein Metrik [**Jensen, 1974**].

• Die $S^{15}$ hat eine dritte $\mathrm{Spin}(9)$-invariante homogene Einstein Metrik [**Bourguignon und Karcher, 1978**].

• Auf Sphären gibt es keine anderen homogenen Einstein Metriken [**Ziller, 1982**].

• Böhm-Metriken auf $S^5$, $S^6$, $S^7$, $S^8$, und $S^9$ [**Böhm, 1998**].

**Bemerkung**: Die Böhm-Metriken zeigen, dass es auch andere Einstein Metriken auf Sphären geben könnte. Also, stellt man sich die folgenden Fragen:

**Frage 1**: **Gibt es andere nicht-homogene Einstein Metriken auf den Standardsphären?**

**Frage 2**: **Gibt es möglicherweise Einstein Metriken auf exotischen Sphären?**

**Frage 3**: **Wie groß ist der Raum aller Einstein Metriken auf einer gegebenen Sphäre?**

## •Die Gruppen der Homotopiesphären

Im Jahr 1956 überraschte **John Milnor** die mathematische Welt mit seiner Entdeckung der **exotischen** Sphären. Milnor zeigte, dass es 7-dimensionale Mannigfaltigkeiten $\Sigma$ gibt, die **homöomorph, aber nicht diffeomorph** zur Standardsphäre sind. Damit war die Differentialtopologie geboren.
Später zeigten **Kervaire und Milnor [1963]**, dass die Menge der differenzierbaren orientierten Homotopiesphären der Dimension $k > 5$ eine Abelsche Gruppe $\Theta_k$ ist. Das Gruppenprodukt ist **die zusammenhängende Summe**. Also $\Theta_k$ hat eine Untergruppe $bP_{k+1}$ der $k$-dimensionalen Homotopiesphären, die eine $(k+1)$-dimensionale parallelisierbare Mannigfaltigkeit $V_{k+1}$ berandet. Es gilt

- $bP_{2m+1} = 0$ für $m \geq 1$,
- $bP_{4m+2} = 0$, oder $\mathbb{Z}_2$. Zum Beispiel $bP_{4m+2} = \mathbb{Z}_2$ wenn $4m + 2 \neq 2^i - 2$. Aber $bP_{4m+2} = 0$ wenn $m = 1, 3, 7, 15$. Die volle Antwort auf die Frage wann diese Gruppe trivial ist, ist nicht bekannt.
- $bP_{4m}$, $m \geq 2$ ist eine zyklische Gruppe der Ordnung
$$|bP_{4m}| = 2^{2m-2}(2^{2m-1} - 1) \text{ Zähler } \left(\frac{4B_m}{m}\right),$$
wobei $B_m$ die $m$-te Bernoullische Zahl ist.

| $k$ | $\Theta_k$ | $bP_{k+1}$ |
|---|---|---|
| 5 | 0 | 0 |
| 6 | 0 | 0 |
| 7 | $\mathbb{Z}_{28}$ | $\mathbb{Z}_{28}$ |
| 8 | $\mathbb{Z}_2$ | 0 |
| 9 | $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ |
| 10 | $\mathbb{Z}_6$ | 0 |
| 11 | $\mathbb{Z}_{992}$ | $\mathbb{Z}_{992}$ |
| 12 | 0 | 0 |
| 13 | $\mathbb{Z}_3$ | 0 |
| 14 | $\mathbb{Z}_2$ | 0 |
| 15 | $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_{8128}$ | $\mathbb{Z}_{8128}$ |
| 16 | $\mathbb{Z}_2$ | 0 |
| 17 | $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ | $\mathbb{Z}_2$ |
| 18 | $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_8$ | 0 |
| 19 | ? | $\mathbb{Z}_{130,816}$ |

1966 hat **Brieskorn** eine einfache, schöne, geometrische Beschreibung für alle Homotopiesphären in der $bP$-Untergruppe gefunden.

## • Brieskorn-Mannigfaltigkeiten

Brieskorn hat als Beispiele die folgenden Hyperflächen $X(\mathbf{a})$ betrachtet: Es sei $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ ein beliebiges $n$-tupel von ganzen Zahlen $a_i > 1$. Dann ist $X(\mathbf{a})$ die Hyperfläche in $\mathbb{C}^n$ mit der Gleichung

$$f_{\mathbf{a}}(\mathbf{z}) = z_1^{a_1} + \cdots + z_n^{a_n} = 0.$$

Ferner wird eine $(2n-3)$-dimensionale kompakte, differenzierbare und orientierbare Mannigfaltigkeit $L(\mathbf{a})$ definiert durch

$$L(\mathbf{a}) = X(\mathbf{a}) \cap S^{2n-1}.$$

$L(\mathbf{a})$ heißt Brieskorn-Mannigfaltigkeit. Milnor zeigte, dass $L(\mathbf{a})$ mindestens $(n-3)$-fach zusammenhängend ist. Insbesondere ist $L(\mathbf{a})$ ein Rand der $(2n-2)$-dimensionalen parallelisierbaren Mannigfaltigkeit $V_{\mathbf{a}}$.

**Frage:** **Wann ist $L(\mathbf{a})$ eine topologische Sphäre?**

Jedem $n$-tupel $\mathbf{a} = (a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ ordnet man einen bewerteten Graphen $G(\mathbf{a})$ zu. $G(\mathbf{a})$ hat $n$ Eckpunkte, die mit $a_1, \ldots, a_n$ bewertet sind. $G(\mathbf{a})$ hat eine $a_i$ und $a_j$ verbindende Strecke für jedes Punktepaar $a_i, a_j$ mit größtem gemeinsamen Teiler $(a_i, a_j) > 1$. Sei $K$ die Komponente von $G(\mathbf{a})$, in der die geraden $a_k$ liegen. So kommen wir zu dem berühmten **Brieskorn-Graph-Satz**

**Der Satz von Brieskorn**: *Die Mannigfaltigkeit $L(\mathbf{a})$ $(n \geq 3)$ ist eine topologische Sphäre genau dann, wenn der $\mathbf{a}$ zugeordnete Graph $G(\mathbf{a})$ eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

1. *$G(\mathbf{a})$ hat mindestens zwei isolierte Punkte,*
2. *$G(\mathbf{a})$ hat einen isolierten Punkt und $K$ besteht aus einer ungeraden Anzahl von Punkten, und für $a_i, a_j \in K, \quad$ mit $i \neq j$ $\mathrm{ggT}(a_i, a_j) = 2$.*

**Frage:** Sei $L(\mathbf{a})$ eine topologische Sphäre. Wann ist $L(\mathbf{a})$ eine Standardsphäre? Und wann ist sie exotisch?

• $n = 2m$ **gerade** $\quad (\dim(L) = 1 \bmod 4)$
Es ist entweder $bP_{4m-2} = 0$ und für jedes gewählte $\mathbf{a}$ ist $L(\mathbf{a})$ diffeomorph zur **Standardsphäre** oder wir haben den

**Satz von Brieskorn**: Sei $L(a_1, ..., a_n)$ eine topologische Sphäre, $n = 2m \geq 4$ gerade und sei $bP_{4m-2} \neq 0$. Die Mannigfaltigkeit $L(\mathbf{a})$ ist eine exotische Sphäre dann und nur dann, wenn $G(\mathbf{a})$ genau einen isolierten Punkt $a_k$ und nur eine weitere Komponente hat und $a_k = \pm 3 \bmod 8$.

**Beispiel:** $L(3, 2, 2, 2)$ ist eine 5-Sphäre. Es gibt keine exotischen Sphären der Dimension 5. $L(3, 2, 2, 2, 2, 2)$ ist eine exotische Sphäre der Diemension 9, die sogenannte **Kervaire-Sphäre**.

• $n = 2m + 1$ **ungerade** $\quad (\dim(L) = 3 \bmod 4)$
Dazu genügt die Signatur $\tau(V_{\mathbf{a}}^{4m})$ mit $V_{\mathbf{a}}^{4m}$ als berandeter parallelisierbarer Mannigfaltigkeit, deren Rand $\partial V_{\mathbf{a}}^{4m}$ diffeomorph zu $L(\mathbf{a})$ ist. Sei $\partial V_{\mathbf{a}}^{4m} = L(\mathbf{a})$ und $\partial V_{\mathbf{b}}^{4m} = L(\mathbf{b})$. Dann sind $L(\mathbf{a}) \simeq L(\mathbf{b})$ **orientierungstreu diffeomorph** genau dann, wenn

$$\tau(V_{\mathbf{a}}^{4m}) = \tau(V_{\mathbf{b}}^{4m}) \bmod 8 \cdot |bP_{4m}|.$$

Insbesondere ist $L(\mathbf{a})$ eine Standardsphäre, wenn $\tau(V_{\mathbf{a}}) = 0 \bmod 8 \cdot |bP_{4m}|$.

**Frage:** Und, wie kalkulieren wir die Signatur $\tau(V_{\mathbf{a}}^{4m})$?
Brieskorn hat die folgende Formel für $\tau(V_{\mathbf{a}}^{4m})$ abgeleitet

$$\#\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{2m+1} \mid 0 < x_i < a_i \text{ and } 0 < \sum_{j=1}^{2m+1} \frac{x_i}{a_i} < 1 \text{mod} 2\}$$

$$-\#\{\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^{2m+1} \mid 0 < x_i < a_i \text{ and } 1 < \sum_{j=1}^{2m+1} \frac{x_i}{a_i} < 2 \text{mod} 2\}.$$

**Beispiel:** Nehmen wir die $7$-dimensionale Brieskorn-Mannigfaltigkeit $L(6k-1, 3, 2, 2, 2)$. Nach dem Brieskorn-Graph-Satz ist das immer eine Homotopiesphäre. Es gilt $\tau(L) = 8k$. Folglich ist $L(5, 3, 2, 2, 2) = \Sigma_1^7 \in bP_8 = \mathbb{Z}_{28}$ eine exotische $7$-Sphäre und sie heißt Milnor-Generator (d.h. alle anderen Sphären sind die zusammenhängenden Summen von $\Sigma_1^7$).

**Bemerkung:** Für jedes $\mathbf{a}$ ist $L(\mathbf{a})$ eine Untermannigfaltigkeit der $(2n-1)$-dimensionalen Sphäre $S^{2n-1}$. **Welche induzierten geometrischen (Riemannschen) Strukturen gibt es auf $L(\mathbf{a})$**?

**Frage: Kann $L(\mathbf{a})$ für gewisse $\mathbf{a}$ Einstein-Metriken tragen**?

## • Die Sasakische Geometrie

**Definition**: *Eine $(2n+1)$-dimensionale Mannigfaltigkeit $M$ heißt eine* **Kontakt-Mannigfaltigkeit**, *wenn es eine 1-Form $\eta$ gibt auf $M$ derart, dass*

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

*an jeder Stelle $p \in M$.*

**Lemma**: *Sei $(M, \eta)$ eine Kontakt-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau ein Vektorfeld $\xi$ mit*

$$\xi \rfloor \eta = 1, \qquad \xi \rfloor d\eta = 0.$$

*Dieses $\xi$ heißt* **Reeb-Vektorfeld.**

**Lemma**: *Sei $(M, \eta)$ eine Kontakt-Mannigfaltigkeit. Dann ist der Kegel $(\mathcal{C}(M), \omega) := (M \times \mathbb{R}_+, d(r^2\eta))$ die* **symplektische Mannigfaltigkeit**.

**Definition**: *Sei $(M, \eta)$ eine Kontakt-Mannigfaltigkeit. Man sagt, dass eine Riemannsche Metrik $g$ auf $M$ eine Sasaki-Metrik ist, wenn der Kegel $(\mathcal{C}(M), \bar{g}, \omega) := (M \times \mathbb{R}_+,\ dr^2 + r^2 g,\ d(r^2\eta))$ die Kähler-Mannigfaltigkeit ist. Man nennt $\mathcal{S} = (g, \eta, \xi)$ die Sasakistruktur. Wenn der Kegel der Calabi-Yau-Raum ist, nennt man $(M, \eta, g, \xi)$ den Sasaki-Einstein-Raum.*

**Definitionen:** *Sei $(M, \eta, g, \xi)$ eine kompakte Sasaki-Mannigfaltigkeit. Das Reeb-Vektorfeld ist ein Killing-Feld der Länge 1. Der Fluß dieses Killing-Vektorfeldes heißt* **Reeb-Fluß**. *Wenn alle Flußlinien geschlossen sind, nennt man diesen Fluß* **quasi-regulär** *(oder fast regulär). Dann definiert der Reeb-Fluß eine isometrische $S^1$-Wirkung auf $M$. Generell ist der Quotientenraum $\mathcal{Z} := M/S^1$ keine glatte Mannigfaltigkeit aber er ist eine $V$-***Mannigfaltigkeit** *(oder ein* **Orbifold***). Und $M$ ist ein $S^1$-***Prinzipal-V-Bündel** *über $\mathcal{Z}$. Die Sasakistruktur heißt* **regulär**, *wenn $\mathcal{Z}$ eine glatte Mannigfaltigkeit und $M$ ein $S^1$-Prinzipalbündel über $\mathcal{Z}$ sind.*

**Satz**: *Sei $(M, \eta, g, \xi)$ eine Sasaki-Mannigfaltigkeit. Dann ist $\mathcal{Z}$ ein kompaktes Kähler-Orbifold. Im Falle, dass $(M, \eta, g, \xi)$ auch Sasaki-Einstein ist, muß $\mathcal{Z}$ Kähler-Einstein sein.*

**Satz [Sasaki, 1976]**: *Alle Brieskorn-Mannigfaltigkeiten sind auch Sasaki-Mannigfaltigkeiten.*

**Beweis (Skizze):** Wir definieren die folgenden kgV $C_i = \mathrm{kgV}(a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n)$, $d = \mathrm{kgV}(a_1, \ldots, a_n)$. Seien $w_i = C/C_i$ und $\mathbf{w} := (w_1, \ldots, w_n)$. Dann gilt

$$f_{\mathbf{a}}(\lambda^{w_1} z_1, ..., \lambda^{w_n} z_n) = \lambda^d f_{\mathbf{a}}(z_1, ..., z_n)$$

D.h. $f_{\mathbf{a}}(\mathbf{z})$ ist ein quasi-homogenes Polynom des Gewichtes $\mathbf{w}$ und des Grades $d$.

Betrachten wir eine $\mathbf{w}$ zugeordnete $\mathbb{C}^*_{\mathbf{w}}$-Wirkung auf $\mathbb{C}^n$, d.h. die Abbildung $\phi_{\mathbf{w}} : \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ folgendermaßen

$$\phi_{\mathbf{w}}(\lambda, \mathbf{z}) = (\lambda^{w_1} z_1, \ldots, \lambda^{w_n} z_n).$$

Wir benuzen auch die zugeordnete $S^1_{\mathbf{w}}$-Wirkung wenn $|\lambda| = 1$. Sei

$$(X(\mathbf{a}) \setminus \{0\})/\mathbb{C}^*_{\mathbf{w}} := \mathcal{Z}(\mathbf{a}) =: L(\mathbf{a})/S^1_{\mathbf{w}}.$$

**Mann kann zeigen dass $L(\mathbf{a}) \to \mathcal{Z}(\mathbf{a})$ die Sasaki-Faserung ist.**

In der Tat, die Mannigfaltigkeit $L(\mathbf{a})$ hat eine kanonische quasi-reguläre Sasakistruktur weil sie eine Sasaki-Untermannigfaltigkeit von $S^{2n-1}$ ist. Jede ungeraddimensionale Sphäre hat eine "gewichtete" Sasakistruktur $(\xi_{\mathbf{w}}, \eta_{\mathbf{w}}, g_{\mathbf{w}})$. Der Quotientenraum dieser "gewichteten" $S^1_{\mathbf{w}}$-Wirkung ist genau der gewichtete projektive Raum $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{C}}(\mathbf{w})$ und das folgende Diagramm ist kommutativ:

$$
\begin{array}{ccc}
L(\mathbf{a}) & \longrightarrow & S^{2n+1}_{\mathbf{w}} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \pi} & & \Big\downarrow \\
\mathcal{Z}(\mathbf{a}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathbf{w}).
\end{array}
$$

Die horizontalen Abbildungen sind die Sasakische und die Kählersche Einbettung. $\square$

**Frage:** Lassen Sie mich zu einer der vorherigen Fragen zurückkehren. Wir haben gesehen, dass ALLE Brieskorn-Mannigfaltigkeiten auch Sasaki-Mannigfaltigkeiten sind. Können einige von ihnen Sasaki-Einstein-Räume sein?

**Antwort**: **Ja, überraschend viele können es sein**.

## • Sasaki-Einstein Metriken auf $L(\mathbf{a})$

**Satz** [**Boyer,Galicki,Kollár' 2003**] *Sei* $\mathcal{Z}(\mathbf{a})$ *der Quotientenraum der Brieskorn-Mannigfaltigkeit* $L(\mathbf{a})$. *Seien* $C_i = \mathrm{kgV}(a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, a_n)$, $b_i = \mathrm{ggT}(C_i, a_i)$. *Dann trägt* $\mathcal{Z}(\mathbf{a})$ *eine Kähler-Einstein Metrik, wenn*

1. $1 < \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i}$,
2. $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i} < 1 + \frac{n}{n-1} \min_i\{\frac{1}{a_i}\}$, *und*
3. $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{a_i} < 1 + \frac{n}{n-1} \min_{i,j}\{\frac{1}{b_i b_j}\}$.

*In solchen Fällen trägt* $L(\mathbf{a})$ *eine Sasaki-Einstein Metrik mit eindimensionaler Isometriegruppe.*

**Frage:** Was gewinnen wir aus dem oben genannten Satz?
**Antwort: Einstein Metriken auf Homotopiesphären.** Wir vermuten, dass unser Satz solche Metriken auf alle Homotopiesphären in der $bP$-Untergruppe ergibt. Diese Vermutung gilt für die n-Sphären der Dimensionen $1 \bmod 4$ und $\dim(L) = 7, 11, 15$.

**Beispiele**:

- Alle Milnor 7-Sphären sind auch Einstein-Räume.
- Die 13-Standardsphäre trägt mindestens $10^9$ verschiedene Familien von Einstein Metriken, eine Familie der Dimension **21300113901610**.